

محاضرة 7 : Histogram

المحتوى : ① تعريف بال Histogram

Histogram equalization ②

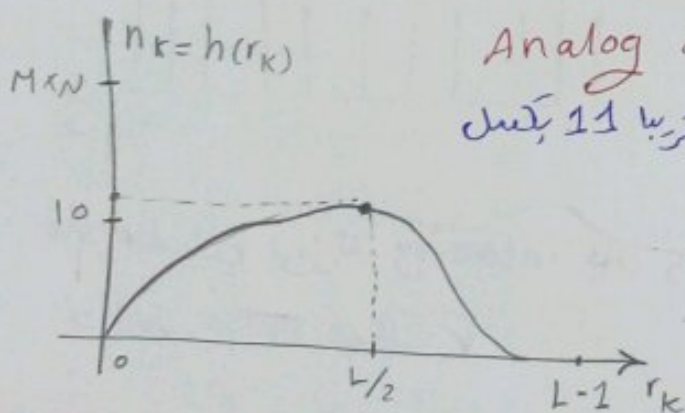
تعريف بال Histogram

* لوفاكر في محاضرة 5 ، انكنا عن probabilistic models ، به وقت استخدامها دلوقت

* ال Histogram هو وصف لدرار pixels التي بتعمل قيم ، وبتعرفك توزيع ال intensities عامل رازاي

* بتستفيد من ال Histogram في معرفة ال Dynamic Range عالي ولدك ، الصورة غامقة ولا فاتحة ، ال Contrast اظلمه ايد ، وعكسه اعمل بحدكه

بيترسم على المحور الأفقي ال intensities ، وعلى المحور الرأسي عدد ال pixels



لكل intensity ، هنفرض مثال لصورة Analog
* معنى الرسم إنك عند مثال القيمة $L/2$ هلاقي تقريبا 11 بكسل
لبيح القيمة دي

* ال Histogram للصورة ال Digital موصو
في جلابد [7, 2] وصفة 29, 30
في الورقة

* هنقول إنك قيمة البكسل r_k حيث k بتاخد قيم من $0 \rightarrow L-1$ (0 - 255 في مثالنا)
و، إنك عدد البكسلز اللي قيمتها r_k احصاها n_k أو $h(r_k)$

$$h(r_k) = n_k$$

* هنتعامل بال probabilistic model فوجب ال $P(r_k)$ [نفس اللي اشتريتها في آخر محاضرة 5]

اللي بتبهر عنه احتمالية كل قيمة ال intensity

$$* P(r_k) = \frac{h(r_k)}{M \times N} = \frac{n_k}{M \times N}$$

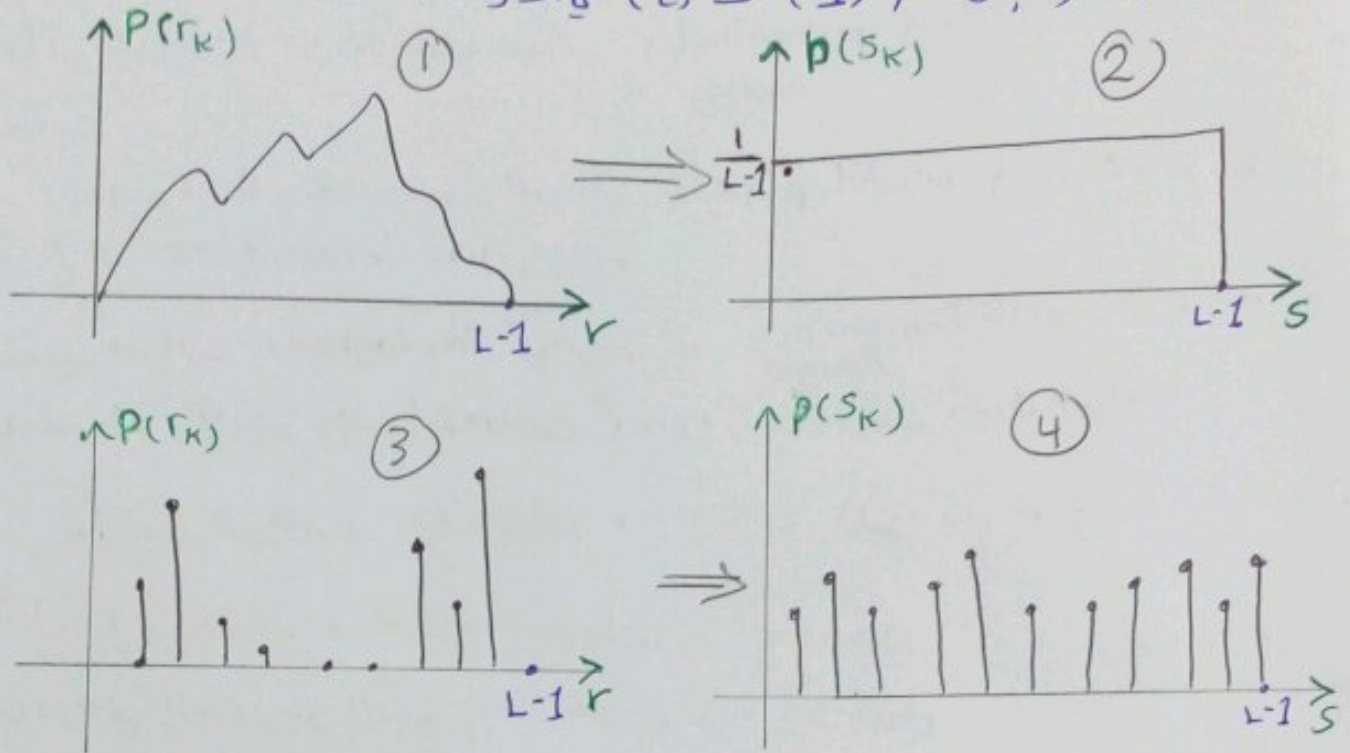
$$* \sum_{k=0}^{L-1} P(r_k) = 1$$

مجموع الاحتمالات

شكل 7.2 Histogram للصورة الغامقة والفاتحة وغيرها موجود في صلايد 30 و 31 ملف اسنر التي قامت باعرضها كويس

Histogram Equalization

الهدف من ال Histogram Equalization اني على اقلني توزيع ال intensity يكون Uniform (يعني من (1) لـ (2) في ال Analog ومن (3) الى (4) في ال Digital)



ملاحظه اني برمز ال intensity بالـ s بعد ال equalization حيث s هي دالة T في ال r

$$s = T(r)$$

حيث T هي العملية التي يجعلها عشوائية Histogram equalization
ملاحظه اني عملت المحاور الراسية بالـ Probability (قولنا مستعمل بالـ Probability

أو بمعنى آخر **Normalized Histogram**)

ملاحظه اني ال Histogram equalization في (4) تقريبا Uniform لكن من الباطن، وهذه الطبيعي في ال Digital images لسببين

① ال Sampling and quantization فيه approximation (وقت التقاط الصورة)

② ال Rounding للقيم بتاعت ال Histogram equalization

مستوف مثال على
التركيب ده في صلايد

* راجع سلايد 7.3

* لازم ال T تكون $\text{monotonically increasing}$ (في شرط ال Convex في ال Fuzzy بس من غير مزياد decreasing)

* لازم صيغة التحويل $T(r)$ اللي هي S تبقى بين $0 \leq S = T(r) \leq 1$

الو عايز أعمل reverse mapping يعني عايز أرجع لـ r من ال S

$$r = T^{-1}(S)$$

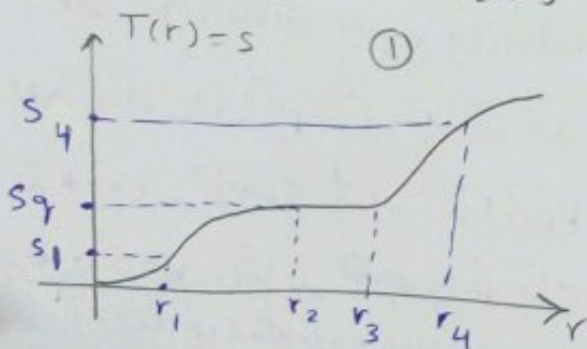
لازم ال T تكون $\text{Strictly monotonically increasing}$

- Monotonically increasing means if $(r_2 > r_1)$ then $T(r_2) \geq T(r_1)$
- Strictly Monotonically increasing means if $(r_2 > r_1)$ then $T(r_2) > T(r_1)$

① Monotonically increasing

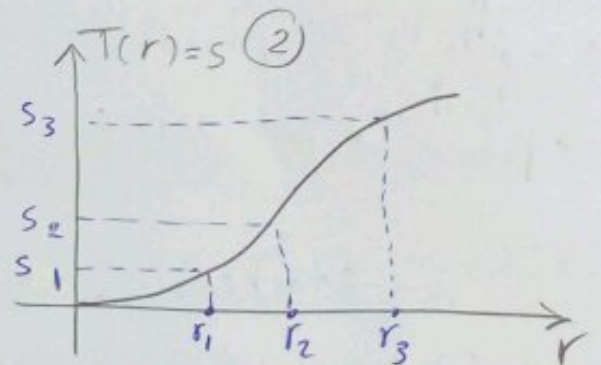
② Strictly monotonically increasing

* الفرق متوضع في سلايد 6.4



$$r_4 > r_3 > r_2 > r_1$$

$$T(r_4) > [T(r_3) = T(r_2)] > T(r_1)$$



$$r_3 > r_2 > r_1$$

$$T(r_3) > T(r_2) > T(r_1)$$

في ① معرفتي أرجع من s_2 لـ r عنده ممكن ليها أكثر من قيمة زي r_2, r_3

ممكن في ② أقرر أرجع من أي S لـ r متافرة ليها .

* عايز نعرف شكل ال Transformation T حاصل لـ r (البيانات مطلوب) ومنه

نطلع معادلة لحساب ال probability $P(s)$

هنا فترتها في ال Analog وفترة في ال Digital

* نحتاج لحفظ متوابع معادلات بسيطة عامة مثل تعريف أشر ملك بيت
صنيم ، هي آله وفلاص .

* نكتب على r و s على random variables في الفترة $[0, L-1]$

* نكتب صيغة اسمها ar probability density function (مرار Stochastic)

اختصارها PDF ، نكتبها PDF بـ $P_r(r)$ ، $P_s(s)$

* صيغة نظرية بقول ، انه لو $T(r)$ و $P_r(r)$ معروفين و Continuous وقابلين
للتفاضل بـ $P_s(s)$ نكتب

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (\#)$$

* ار $T(r)$ نكتب دالة بالشكل التالي (اعرضها هذه وفلاص)

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r P_r(w) dw \quad (*)$$

* لاحظ انه المكامل بـ جمع probability ، طما بـ جمع probability يبقى دايعا s بتزيد

* مضمين صيغة اسمها probability صيغته ، بحسب كده برود s عمرها ما يقل
كل صارت لقيمة أكبر r

* أعلى قيمة للمكامل نكتب 1 طما بـ جمع ar PDF التي هي $P_r(r)$

* ار w في المكامل ده dummy variable ، بتحل مكانه رايضا للمكامل وبغرض في ان نض
ا نعاملهوش أي دلالة .

* متوف رحمة ار S_k مع r_k في سلايد 7.10 (نسبة السلام)

* نكتب s بافتراض انه $P_r(r)$ متوفرة كالتالي

$$P_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)} & 0 \leq r \leq (L-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

صغوف في المعادلة (*) ونض

$$\begin{aligned} S = T(r) &= (L-1) \int_0^r P_r(w) dw \\ &= (L-1) \int_0^r \frac{2w}{(L-1)} dw = \left[\frac{r^2}{L-1} \right] \end{aligned}$$

(4)

نقد رتبه (حسب $P_s(s)$) بالتعويض في المعادلة (#) من الصفحة التي فاتت

$$\begin{aligned}
 P_s(s) &= P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \\
 &= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[\frac{ds}{dr} \right]^{-1} \right| \quad \text{ممكن اجيب} \\
 &= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{d}{dr} (T(r)) \right|^{-1} \quad \text{عوضه عن ds بـ d(T(r))} \\
 &= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{d}{dr} \frac{r^2}{(L-1)} \right|^{-1} \quad \text{قيم Pr(r) و S من الصفحة التي فاتت بالتعويض مباشر} \\
 &= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{(L-1)}{2r} \right|^{-1} = \frac{1}{L-1}
 \end{aligned}$$

* لاحظ راند P_s قيمة Constant كلها هي دعوه بشتل الـ P_r خالص

* لاحظ راند النتيجة بتاعت $P_s(s)$ هي $\frac{1}{L-1}$ لـ Analog image موده نفس

الكلام اللي بتقوله الرصه في صفحه (2) رصه (2)

* $P_s(s)$ هي دي الـ probability او توزيع الـ intensity اللي عايز اوصله
 ، ومعناها اني لو وصلتها يبقى قيم كل الـ intensity ليها نفس العدد من pixels
 وهو موده الـ Histogram equalization

* خيطه الـ digital image مني هقدر اوصل بالزبط $P_s(s)$

تبقى $\frac{1}{L-1}$ بسبب السبب في آخر صفحه (2)

(1) الـ approximation لما بلفظ الصورة

(2) الـ rounding لما بيجل الـ Transformation

منه في الـ Digital هنعير نفس المعادلات بس بـ (\sum) بدل التكامل

وبشكل Discrete الـ PDF

نیمه دیجیتال هیستوگرام

$$P_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

* n_k خلاصه یقین حفظی

معناها، ایند و کذلک از r_k

* راجع از slides بعد از کلام

ده هفتاد و نه مفهوم

$$S_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k P_r(r_j)$$

* راجع از ساید 7.9

$$S_k = (L-1) \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{MN} = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j$$

* n_j هیستوگرام r_j intensity

* فاضل مثال علی اللیل دی، و ایند راجع الیظیفی ساید [7.11]

r_k, n_k (هفتاد و نه)

معطیات بسأله: جدول علی اتصال

اضافه $(P_r(r))$ و راند اعمدة 3 بیت (3-bit) (یعنی $L=2^3=8$) و أبعاد

الصورة 64×64 و مبداء input histogram علی اتصال فوق

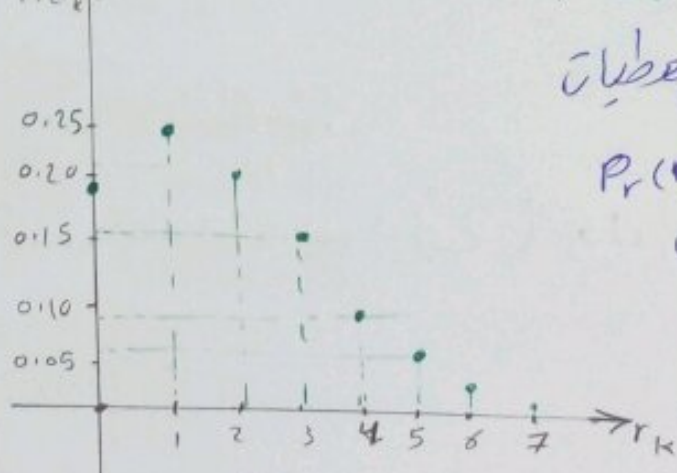
output histogram و r_k و S_k و نرحم از

المطلوب: لحساب از S و نرحم العلاقة بین

* الی هیطون عشان بالتفصیل یحمل *

r_k	n_k	$P_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}$
$r_0=0$	790	0.19
$r_1=1$	1023	0.25
$r_2=2$	850	0.21
$r_3=3$	656	0.16
$r_4=4$	329	0.08
$r_5=5$	245	0.06
$r_6=6$	122	0.03
$r_7=7$	81	0.02

input histogram (من الجدول)



* ارجع معطیات

* حسنها از $P_r(r_k)$ فی الجدول

محکم فی الامتانه بدیک r_k و n_k مع أبعاد الصورة و الی کذا و یطلب منك کل طابعه ثابته

$$S_k = T(r_k) = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j = (L-1) \sum_{j=0}^k p_j(r_j) \quad \text{الحل}$$

استعمل (1) أد (2) في الحساب، مع ملاحظة أن (2) أسرع لو كنت حاسب
اد $P_r(r_k)$ زي الجدول

$$S_0 = (L-1) \sum_{j=0}^0 p_j(r_j)$$

$$= (8-1) p_0(r_0) = 7 \times 0.19 = \boxed{1.33} \quad \text{× هعملها rounding}$$

$$S_1 = (L-1) \sum_{j=0}^1 p_j(r_j)$$

$$= 7 [p_0(r_0) + p_1(r_1)]$$

$$= \underbrace{7 p_0(r_0)}_{S_0} + 7 p_1(r_1) = \boxed{S_0 + 7 p_1(r_1)} \quad \text{عشبة أقل الحساب}$$

$$= 1.33 + 1.75 = \boxed{3.08}$$

$$S_2 = 7 \sum_{j=0}^2 p_j(r_j) = 7 [p_0(r_0) + p_1(r_1) + p_2(r_2)]$$

$$= \underbrace{7 p_0(r_0) + 7 p_1(r_1)}_{S_1} + 7 p_2(r_2)$$

ص الجدول = 0.21

$$= \boxed{S_1 + 7 p_2(r_2)} = 3.08 + 1.47 = \boxed{4.55}$$

× لاحظ إنه اد S بتغير كلمة، ما استعمل الصيغة المختصرة؛ سولك في الحساب
× بنصف طريقة الحساب هنجيب الباقي

$$S_3 = S_2 + 7 p_3(r_3) = 4.55 + 7 \times 0.16 = 5.67$$

$$S_4 = S_3 + 7 p_4(r_4) = 5.67 + 0.96 = 6.23$$

$$S_5 = S_4 + 7 p_5(r_5) = 6.23 + 0.42 = 6.65$$

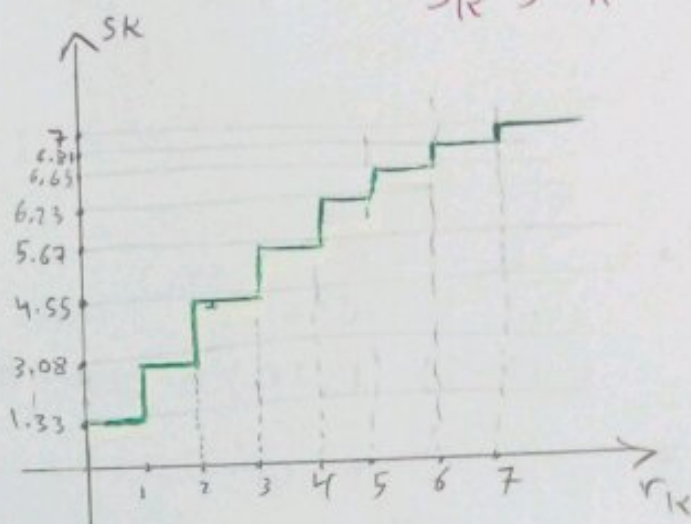
$$S_6 = S_5 + 7 p_6(r_6) = 6.65 + 0.21 = 6.86$$

$$S_7 = S_6 + 7 p_7(r_7) = 6.86 + 0.14 = 7$$

$\boxed{7}$

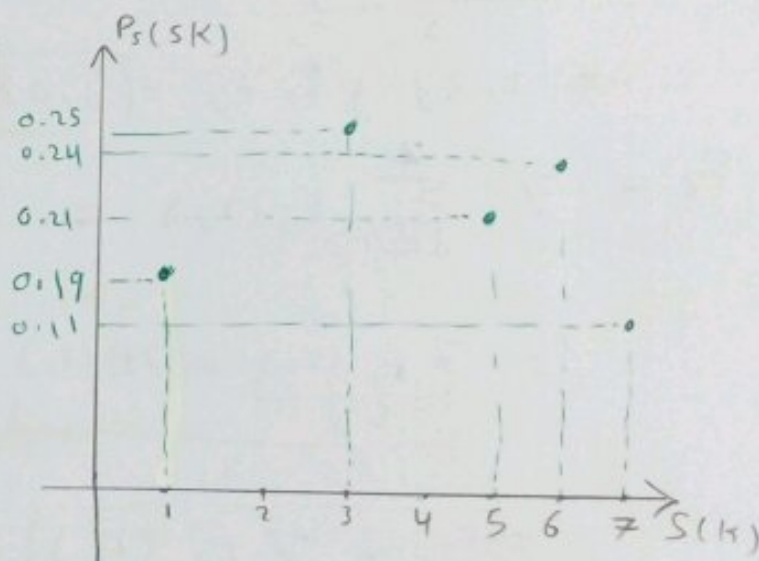
روش Rounding و مقیم S_k (یعنی Quantization) و رسم نمودار S_k و r_k

S	Exact	Quantized
S_0	1.33	1
S_1	3.08	3
S_2	4.55	5
S_3	5.67	6
S_4	6.23	6
S_5	6.65	7
S_6	6.86	7
S_7	7	7



باقی بانی آمپ $P_s(S_k)$ و رسم output Histogram

r_k	n_k	S_k	$P_s(S_k)$
$r_0 = 0$	790	$S_0 = 1$	
$r_1 = 1$	1023	$S_1 = 3$	
$r_2 = 2$	850	$S_2 = 5$	
$r_3 = 3$	656	$S_3 = 6$	
$r_4 = 4$	329	$S_4 = 6$	
$r_5 = 5$	245	$S_5 = 7$	
$r_6 = 6$	122	$S_6 = 7$	
$r_7 = 7$	81	$S_7 = 7$	



* عنده 5 مقیم لای S (1, 3, 5, 6, 7) یعنی $S_3 = S_4$ و $S_5 = S_6 = S_7$ و مطلعش عنده مقیم مساوی 2 أو 4 (یعنی جدا صفتش این حدکله)

* لاحظ انه $r_5 = 5$ لا تحولت بقت $S_5 = 7$ و $S_6 = 7$ و $S_7 = 7$

معنی کده رانده عدد الیکسزنی S الی لیسم القیمه 7 بقی $n_5 + n_6 + n_7$ و مع r_3, r_4 بعد از mapping بقی عدد ال pixels یعنی 6 هو $n_3 + n_4$

$$P(S=1) = n_0 / MN = 790 / 4096 = 0.19$$

$$P(S=3) = n_1 / MN = 1023 / 4096 = 0.25$$

$$P(S=5) = n_2 / MN = 850 / 4096 = 0.21$$

$$P(S=6) = (n_3 + n_4) / MN = (656 + 329) / 4096 = 0.24$$

$$P(S=7) = (n_5 + n_6 + n_7) / MN = (245 + 122 + 81) / 4096 = 0.11$$

* Histogram التي طبع مقبول ذلك equalized (طبعا هو approximated)

* بعض قيم غير المقبول بنوع ال S بتقول ذلك ليها قيمة Quantized
 في (2) أو (5) أو (4)، عشان كده بعض بتسز عندهم

* لما عملنا Mapping من r_5 الي كانه عندها 245 بتسب قيمته ب 6 ، لقينا
 ان r_5 بقت s_5 قيمتها ب 7 ، فيقر عندي 245 بتسب قيمته ب 7 بعد
 equalization

* نفس الكلام مع r_6 و r_7 ، لما اتعمل mapping بقت القيم 7

* ممكن نكتب ان $P_s(s)$ بطريقة كائنية (لو ركزت في اللي فات (مفوضيا))

$$P(s=1) = 790 / 4096 = P_0(r_0) = 0.19$$

↑ حسبناها في أول جدول في المصطبان صفتة [6]

$$P(s=3) = 1023 / 4096 = P_1(r_1) = 0.25$$

ممكنه بقى نختصر طاما حسبنا $P_r(r)$ قبل كده ونسرع الحساب

$$P(s=5) = P_2(r_2) = 0.21$$

$$P(s=6) = P_3(r_3) + P_4(r_4) = 0.16 + 0.08 = 0.24$$

$$P(s=7) = P_5(r_5) + P_6(r_6) + P_7(r_7) = 0.06 + 0.03 + 0.02 = 0.11$$

لازم مجموع ال P_s يطع ب 1

$$P(s=1) + P(s=3) + P(s=5) + P(s=6) + P(s=7) = 0.19 + 0.25 + 0.21 + 0.24 + 0.11 = 1$$

* هين بالك ، انك $P_6(s_6)$ هي $P_6(r_6)$ و $P_7(s_7)$ هي $P_7(r_7)$ ، وهكذا

$$P(s=7) = P_5(s_5) + P_6(s_6) + P_7(s_7) \\ = P_5(r_5) + P_6(r_6) + P_7(r_7)$$

ممكن انكر المعلوم
 دي عشان
 حشدنا كده عندها